

АЛТАЕВА АЙЖАН БАКАТКАЛИЕВНА

**ВАРИАНТЫ БИНАРНОСТИ И СЧЕТНОЙ КАТЕГОРИЧНОСТИ ДЛЯ
УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР**

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени
доктора философии (PhD) по образовательной программе
8D05404 – «Фундаментальная и прикладная математика»

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа связана с одним из важных разделов математической логики – теорией моделей, изучающей соотношения между формальным языком и его интерпретациями, или моделями. Одним из классических объектов исследования в теории моделей первого порядка являются полные теории, которые в свою очередь подразделяются на стабильные и нестабильные. Начиная с конца шестидесятых годов двадцатого века теория моделей главным образом развивалась в направлении изучения свойств стабильных теорий, было получено много глубоких теорем о строении их моделей. При этом наиболее интересные и плодотворные идеи и методы, такие как теория размерностей, ортогональность, модулярность и глубина типов, возникали при изучении подклассов стабильных теорий с естественными ограничениями на формульные множества. В частности, понятие сильной минимальности, введенное А. Лахланом и Дж. Болдуином, оказало существенное стимулирующее воздействие на создание вышеперечисленных методов.

Вместе с тем на протяжении длительного времени важным предметом изучения для специалистов по теории моделей являлся класс линейно упорядоченных структур, подкласс класса нестабильных теорий. За это время при исследовании моделей некоторых частных теорий, расширяющих теорию линейного порядка, были получены впечатляющие результаты. Среди тех теорий, к которым были найдены успешные подходы к изучению, можно назвать арифметику Пеано, теорию упорядоченных абелевых групп, теорию вещественно замкнутых полей и саму теорию линейного порядка. Однако в теории моделей общая теория упорядоченных структур начала развиваться только после того, как в 1984 году Ананд Пиллай и Чарльз Стейнхорн ввели понятие о-минимальности в серии совместных работ, которое оказалось весьма плодотворным (Заметим, что введение понятия о-минимальности непосредственно инспирировано статьей Л. ван ден Дриеса, где он изучал о-минимальные обогащения $\langle R, < \rangle$). Напомним, что линейно упорядоченная структура называется о-минимальной, если любое ее формульное подмножество является конечным объединением интервалов и точек. Классический пример о-минимальной структуры — упорядоченное поле вещественных чисел. На сегодняшний день о-минимальность является очень развитой областью в теории моделей с многочисленными применениями не только в математической логике, но и в аналитической и

дифференциальной геометрии, теории функций. Здесь нельзя не отметить выдающийся результат Алекса Вилки, который напрямую связан с теорией функций и геометрией и утверждает, что дополнение конечного числа проекций полиномиально-экспоненциальных равенств и неравенств само является проекцией полиномиально-экспоненциальных равенств и неравенств, иначе говоря, что обогащение упорядоченного поля вещественных чисел экспонентой имеет модельно полную и о-минимальную теорию. Актуальность темы диссертационной работы объясняется тем, что одним из главных направлений современной теории моделей является исследование о-минимальности и ее различных вариантов.

В настоящей работе соискатель продолжает исследование понятия слабой о-минимальности. Особый акцент делается на изучение взаимосвязи понятий бинарности и почти омега-категоричности. Наряду с этим исследуется понятие слабой циклической минимальности, являющееся вариантом о-минимальности для циклически упорядоченных множеств. Любая линейно упорядоченная структура является \emptyset -определимой циклически упорядоченной структурой, и для данной циклически упорядоченной структуры над любым параметром существует определимый линейный порядок. Существует очень тесная связь между слабой циклической минимальностью и слабой о-минимальностью. Вместе с тем существуют различия, возникающие между этими понятиями, которые включают определимость над \emptyset , определяя тем самым независимый интерес для исследования слабой циклической минимальности. Здесь рассматриваются вопросы взаимосвязи понятий почти бинарности и счетной категоричности.

Цели и задачи исследования.

Работа посвящена изучению вопросов взаимосвязи понятий бинарности и почти омега-категоричности в слабо о-минимальных теориях, а также изучению взаимосвязи понятий почти бинарности и счетной категоричности в слабо циклически минимальных теориях.

Задачи исследования:

1. Исследовать общие структурные свойства вариантов о-минимальности: слабой о-минимальности и слабой циклической минимальности.
2. Исследовать свойства почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий.
3. Исследовать свойства счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий.

Основные положения защиты диссертации:

1. Ортогональность произвольного конечного семейства неалгебраических попарно слабо ортогональных 1-типов в почти омега-категоричных вполне о-минимальных теориях.
2. Бинарность почти омега-категоричных вполне о-минимальных теорий.
3. Почти омега-категоричность слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости, имеющих малое число счетных моделей.

4. Описание алгебры бинарных изолирующих формул над неалгебраическим 1-типом над пустым множеством для почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий.

5. Критерий обобщенной коммутативности алгебры бинарных изолирующих формул над парой не слабо ортогональных неалгебраических 1-типов.

6. Описание счетно категоричных m -выпуклых слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, являющихся почти бинарными ($m > 1$).

7. Критерий почти бинарности счетно категоричных не 1-транзитивных слабо циклически минимальных структур в терминах ранга выпуклости.

Объектами исследования являются линейно упорядоченные структуры со свойством слабой о-минимальности; циклически упорядоченные структуры со свойством слабой циклической минимальности.

Методы исследования включают классические методы теории моделей. Помимо этих методов применялась методология изучения упорядоченных структур на основе таких понятий, как о-минимальность и варианты о-минимальности. Типичным в такой ситуации является наложение строгих ограничений на множества, определяемые формулой с одной свободной переменной. Так, о-минимальная структура M может рассматриваться как L -структура, где $L \supset L_0 = \{<\}$, $<$ – линейный порядок на M , и каждое определимое подмножество структуры M является бескванторно L_0 -определимым. Это дает установку для других понятий: заменяем L_0 на некоторый другой известный язык, рассматриваем L -структуры такие, что L_0 -редукт имеет обусловленный тип (например, линейный порядок), и требуем, чтобы каждое определимое подмножество структуры M являлось (бескванторно) L_0 -определимым (можно требовать это для всех моделей данной теории). Некоторая часть необходимого инструментария создается по ходу написания работы.

Научная новизна диссертационных исследований. Получены новые научные результаты при исследовании как слабо о-минимальных теорий, так и слабо циклически минимальных теорий.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории моделей, теории групп, теории полей. Некоторые из полученных результатов применялись к исследованию запросов баз данных над упорядоченной областью определения; в частности, рассматривались вопросы сводимости расширенных запросов к ограниченным.

Связь диссертации с другими научно-исследовательскими работами. Диссертация была реализована в рамках научного проекта грантового финансирования КН МОН РК по приоритетному направлению развития науки «Научные исследования в области естественных наук», специализированному научному направлению «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики» на тему

«Структурные свойства почти омега-категоричных упорядоченных теорий» (2020-2022 годы, AP08855544).

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Логическом коллоквиуме (Познань, Польша, 2021), на Международных конференциях по математической логике «Мальцевские чтения», посвященных памяти А.И. Мальцева (Новосибирск, 2020, 2021), на Международной научной конференции «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (Нур-Султан, 2019), на Традиционной международной апрельской математической конференции ИМММ (Алматы, 2020, 2021), на Международной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке» (Алматы, 2020).

Оценка полноты целей работы. Все задачи диссертационного исследования полностью выполнены. Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждается публикацией в рецензируемых научных журналах, выступлениями на различных научных конференциях.

Оценка научного уровня работы по сравнению с достижениями в научном направлении. Полученные результаты являются новыми, опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых Web of Science и (или) Scopus, и вносят существенный вклад в исследование вариантов о-минимальности.

Публикации. Основные результаты диссертации были опубликованы в 15 работах, в том числе 4 статьи в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор в соответствии с международными базами данных Web of Science и (или) Scopus: Siberian Mathematical Journal, Siberian Electronic Mathematical Reports, Mathematical Notes, Algebra and Logic; 2 статьи в отечественных журналах «Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика» (входит в КОКСНВО) и «Вестник КБТУ»; и 9 работ в материалах международных конференций.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести разделов, заключения, списка использованных источников. Общий объем диссертации 103 страницы, список использованных источников включает 71 работ.

Основное содержание диссертационной работы. Введение включает актуальность темы исследования; цели работы; основные положения, выносимые на защиту; объекты исследования; методы исследования; научную новизну; теоретическую и практическую значимость исследования; апробацию работы.

Первый раздел посвящен исследованию вопроса почти омега-категоричности слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости, имеющих малое число счетных моделей.

Второй раздел посвящен исследованию вопроса бинарности почти омега-категоричных вполне о-минимальных теорий.

Третий раздел посвящен описанию алгебр распределений бинарных изолирующих формул для почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий.

Четвертый раздел посвящен полному описанию счетно категоричных n -выпуклых слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, являющихся почти бинарными.

Пятый раздел посвящен нахождению необходимых и достаточных условий почти бинарности счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий.

Шестой раздел посвящен исследованию свойств E-комбинаций счетно категоричных линейных порядков.

В заключении приводятся и обобщаются основные результаты диссертационной работы.